Evaluation intermédiaire de mathématiques n°2

Date: 16 novembre 2009

Durée: 90 minutes

Enseignant: Jean-Marie Delley

Cours: 1Ma2DF5

Nom: .....

Prénom: .....

Groupe: .....

Matériel autorisé

- Calculatrice personnelle TI34II ou TI30
- Table numérique

Remarques

- Répondre sur l'énoncé, joindre si nécessaire un brouillon
- Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
- Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
- Indiquez vos initiales en haut de chaque page

Informations chiffrées après correction du maître

Notations (une coche par faute) :

Fautes :	→ ..... / ...

Français (une coche par faute) [bonus] :

Fautes :	→ ..... / ...

Total des points des exercices : ..... / .....

Total des points de l'épreuve : ..... / .....

Note : / 6

Commentaires du maître sur le travail

Commentaires de l'élève sur son travail

L'élève doit, dès que le maître lui rend son travail corrigé :

- reporter les éventuels commentaires du maître (voir colonne de gauche) dans son suivi individualisé des évaluations sur le site du cours : http://math.bibop.ch/generalites/evaluation/mode-d-emploi-pour-commencer-le-suivi-individualise-des-evaluations
- y joindre ses propres commentaires
- commencer le corrigé – éventuellement facultatif – du travail (voir au verso)

Informations relatives au corrigé du travail par l'élève

- sur des feuilles A4 au format paysage, sur 3 colonnes et pour chaque erreur, l'élève:

dans la colonne 1: recopie l'erreur	dans la colonne 2: explique en quoi c'est faux (et non pourquoi c'est faux !)	dans la colonne 3: corrige l'erreur

- le maître corrige le corrigé et lui attribue une note indicative qui n'entre pas en compte dans le calcul de la moyenne; par contre:
  - si la note du corrigé est 5.5 ou 6 : la note du travail est augmentée de 0.5
  - si la note du corrigé est 4.5 ou 5 : la note du travail n'est pas modifiée et un crédit de 0.25 est à valoir pour le prochain processus d'évaluation de type «épreuve 90' »
  - si la note du corrigé est inférieure ou égale à 4 : la note du travail n'est pas modifiée
- informations complémentaires sur http://math.bibop.ch/generalites/evaluation/corriges-d-epreuves

Note du corrigé: / 6

Crédit obtenu avec ce corrigé :

Crédit éventuel venant d'un corrigé précédent :

Note finale du travail: / 6

tot: /96 not 3 f: 3 /99

Début du travail

[/12]

Exercice 1 (environ 4 points)

On considère les conjectures suivantes. Les écrire sous la forme:
Conjecture:
Si ..., alors ...

puis déterminer si elles sont vraies ou fausses en justifiant.

(a) Conjecture 1: La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3

Conj1: Si n est entier naturel, alors $n+(n+1)+(n+2)$ est un mult. de

Vrai, démonstration

$$n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$$ qui est bien un multiple de 3

1+3pb

(b) Conjecture 2: $8n+3$ se termine toujours par 1 pour n un entier naturel

Conj2: Si n est un entier naturel, alors $8n+3$ se termine par 1

Faux, contre-exemple:

Si $n=2$: $8\cdot 2+3 = 19$ ne se termine pas par 1

1+3pb

(c) Conjecture 3: n^2+n+11 est premier pour n un nombre entier naturel

Conj3: Si n est un entier naturel, alors n^2+n+11 est toujours premier

Faux contre-exemple:

Si $n=11$: $11^2+11+11 = 11[11+1+1]$

$= 11[13]$ est un multiple de 11

1+3pb

[/6]

Exercice 2 (environ 2 points)

Donner un exemple de conjecture fausse dont la réciproque soit vraie, en donnant les justifications nécessaires (sans tous les détails):

Conj: Si n est un mult de 2, alors n est un mult de 4

faux : contre-ex: 2 est un mult de 2 mais pas de 4 (3)

Réc: Si n est un mult de 4, alors 2 est un mult de 2

vrai : démonstr: $n = 4k \ (k \in \mathbb{Z})$
$= 2(2k)$

donc n est un mult. de 2 (3)

[/17]

Exercice 3 (environ 6 points)

On considère la conjecture suivante:

Si n est tel que n^2 est impair, alors n est impair. (2 pts)

HYP CONCL

(a) Identifier clairement hypothèse(s) et conclusion(s)
(vous pouvez directement les entourer et les identifier ci-dessus)

(b) Donner une hypothèse implicite contenue dans cette conjecture:

n est un entier naturel (2 pts)

(c) Comment démontrer intelligemment cette conjecture ...? Faites-le!

On énonce la contraposée : (3)

Si n est pair, alors n^2 est pair

démonstr : n est pair [par hyp]

donc $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ [par déf de "pair"]

donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

donc n^2 est pair [par déf de "pair"]

La contraposée étant vraie, la conjecture l'est aussi !

(4 pts)

(b) Les deux offres publicitaires ci-dessous sont équivalentes :

A : BOUM SUR LES PRIX : 20% de réduction

B : OFFRE SPECIALE : 25% de produit en plus

Vrai ou faux ? Justifier.

Offre A : 1 produit à 100.- en vendu 80.-

Offre B : pour 100.-, on a 1,25 produit

càd : $\frac{100.-}{x.-} = \frac{1,25}{1}$

et $x = \frac{100}{1,25} = 80.-$

Donc les deux offre sont équivalentes

(4 pts)

(c) Un maçon fabrique deux murs identiques en 14 heures. Combien faudrait-il de temps [en heures minutes secondes] pour que trois maçons fabriquent 5 murs ?

1 maçon	2 murs	14 heures
3 maçons	6 murs	14 heures
3 maçons	5 murs	$14 \cdot \frac{5}{6}$ heures

(·3 entre la 1re et la 2e ligne ; ·$\frac{5}{6}$ entre la 2e et la 3e ligne)

$14 \cdot \frac{5}{6}$ [h] $= \frac{35}{3}$ [h] $= 11\text{h}\ \frac{2}{3}$ [h] $= 11\text{h}\ 40'\ 0''$

(4 pts)

(d)Enoncer sa réciproque. Est-elle vraie ou fausse? Justifier

Si n est impair, alors n^2 est impair (2 pts)

vraie : $n = 2k+1$ [par hyp]

donc $n^2 = (2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

donc n^2 est impair [par déf de impair] (4 pts)

Exercice 4 (environ 10 points) [/29]

(a) Lors du tournage d'un film, le réalisateur dispose de 651 figurants habillés en noir et de 465 figurants habillés en rouge. Il doit former des équipes constituées de figurants vêtus de rouge et de figurants vêtus de noir de la manière suivante: dans chaque groupe, il doit y avoir le même nombre de figurants habillés en rouge; dans chaque groupe, il doit y avoir le même nombre de figurants habillés en noir; le nombre d'équipes doit être maximal.

Quelle sera la composition d'une équipe et combien y aura-t-il d'équipes?

651 N : $651 = 3 \cdot 7 \cdot 31$

465 R : $465 = 3 \cdot 5 \cdot 31$

$\Rightarrow pgcd(651; 465) = 3 \cdot 31 = 93$

on peut faire 93 équipes, chacune avec { 7 noirs, 5 rouges

(4 pts)

(d) Calculer en donnant tous les détails et en donnant un résultat sous forme de fraction simplifiée au maximum

$$\frac{-\frac{7}{2}-\frac{17}{6}}{-\frac{3}{4}+\frac{2}{10}} = \frac{\frac{-21-17}{6}}{\frac{-15+4}{20}} = \frac{\frac{-38}{6}}{\frac{-11}{20}} = \frac{-38}{3} \cdot \frac{20}{-11} = \frac{760}{33}$$

4 pts

(e) Simplifier le plus possible et de sorte qu'il n'y ait aucun exposant négatif dans la réponse (a et b sont des nombres réels non nuls) .

$$b^4 a^{-3} \frac{(b^2)^{-1} \cdot (a^{-3} \cdot (ab)^2)^3}{(b^2 \cdot b^{-1})^{-2} \cdot (ab^7)^{-1}} = \frac{b^4 a^{-3} b^{-2} a^{-9} a^3 b^6}{b^{-4} b^2 a^{-1} b^{-7}} = \frac{b^8 a^{-9}}{b^{-9} a^{-1}} = \frac{b^{17}}{a^8}$$

4 pts

(f) Simplifier au maximum:

$$\frac{\sqrt{27^{120}}}{\sqrt{3^{340}}} = \frac{27^{60}}{3^{170}} = \frac{(3^3)^{60}}{3^{180}} = \frac{3^{180}}{3^{180}} = 1$$

3 pts

(g) Transformer pour obtenir une expression sans racine au « dénominateur » et l'écrire le plus simplement possible:

$$-\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{-2}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{-2\sqrt{8}}{8_4} = -\frac{\sqrt{8}}{4} = -\frac{\sqrt{4 \cdot 2}}{4} = -\frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}}{4} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3 pts

(h) Transformer pour obtenir une expression sans racine au « dénominateur » et l'écrire le plus simplement possible:

$$\frac{3}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{4}-\sqrt{3})}{4-3} = 3(\sqrt{4}-\sqrt{3}) = 3(2-\sqrt{3}) = 6-3\sqrt{3}$$

3 pts

Exercice 5 (environ 4 points)

[/12]

(a) Déterminer le nombre rationnel x tel que $x = \frac{59901}{4950}$. Il s'agit de donner les détails des calculs (donc pas une réponse obtenue directement par la calculatrice – vous pouvez si nécessaire adjoindre une feuille de calcul).

59901 | 4950
− 12.4950 | 12,1012121212
reste 501 — 5010
− 1.4950
reste 60 — 600
− 0.4950
reste 600 — 6000
− 1.4950
même reste — reste 1050 — 10500
− 2.4950
reste 600 — 600

donc $\frac{59901}{4950} = 12,10\overline{12}$

(6)

(b) Déterminer la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ telle que $\frac{a}{b} = 175,5\overline{03}$.

Posons $x = 175,5\overline{03}$

On a : $10x = 1755,\overline{03}$

$1000x = 175503,\overline{03}$

donc $1000x = 175503,\overline{03}$
$-\ 10x = 1755,\overline{03}$

$990x = 173748$

$x = \frac{173748}{990} = \frac{28958}{165}$

(6)

[/9]

Exercice 6(environ 3 points)

(a) Calculer à l'aide de la calculatrice le nombre $D=1234567899^2-1234567898^2$

2469000000 (1)

(b) Que pensez-vous du résultat ?

Il est faux, car D doit se terminer par ...9²-...8²
...1-...4
qui ne peut pas être 0 ! (3)

(c) Sans calculatrice, calculer le nombre D à l'aide de l'identité remarquable « différence de deux carrés » $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$D = (1234567899-1234567898)(1234567899+1234567898)$
$= 1 \cdot [\ 2469135797\ ]$ (2)

(d) Que peut-on déduire des calculs précédents? Expliquer ce qui se passe.

La calculatrice n'arrive pas à traiter ce calcul car elle n'a pas assez de place en mémoire ; elle tronque les résultats ! (3)

Exercice 7 (environ 4 points)

[/11]

On considère le théorème sur l'irrationalité de racine de deux:

On donne ci-dessous une démonstration de ce théorème; donner les arguments qui manquent et compléter les [.....] lorsque c'est nécessaire (directement sur l'énoncé):

Démonstration :

Supposons que $\sqrt{2}$ soit une fraction qu'on a réduite au maximum; on a donc $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$, avec n et m deux [entiers naturels], et cette fraction est [irréductible]

On a : $m\cdot\sqrt{2}=$[n],

car[ARG 1: on multiplie par n des 2 côtés] (0,5)

D'où: $2m^2=$[n^2]

c'est-à-dire que n^2 est [pair]

car[ARG 2: déf. de "pair"] (0,5)

D'où [n] est aussi [pair]

car[ARG 3: Si n^2 est pair, alors n pair] (1)

On peut donc maintenant écrire: $n^2=$[$2k$], avec k un entier naturel

car[ARG 4: déf de "pair"] (0,5)

On en déduit que: $2m^2=$[$(2k)^2$]=[$4k^2$],

soit encore que $m^2=$[$2k^2$]

D'où m^2 est [pair], et donc également [m] est [pair]

Or ceci est absurde, car[ARG 5: $\frac{n}{m}$ est irréductible] (1)

Ainsi $\sqrt{2}$ ne peut pas être écrit comme une fraction;

il s'agit donc un nombre [irrationnel].

0,5 pt par [...] ; tot = 18 → 7% pts